BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ОЦЕНКИ В ГЛОБАЛЬНОМ ЭКСТРЕМУМЕ ds-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА И НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

А.Б.РАМАЗАНОВ

Бакинский Государственный Университет

ram-bsu@mail.ru

Найдены новые апостериорные верхние и нижние границы в глобальном экстремуме разности двух строго выпуклых функций дискретного аргумента на порядково-выпуклом множестве. Показаны, как могут быть применены полученные результаты в специальных задачах дробного дискретного программирования.

§1. Введение

Класс задач дискретной оптимизации (ДО) с целевыми функциями, заданными в виде разности двух строго выпуклых (их будем называть ds-выпуклыми) функций дискретного аргумента, достаточно широк. К таким задачам можно привести, например, транспортные задачи с фиксированными доплатами со штрафом, задачи дробного нелинейного целочисленного программирования, задачи живучести сети и др.(см., напр., [1, 2]). Как известно, для разработки локальных (градиентных) методов решения задач ДО необходимо сформулировать условия локальной оптимальности допустимого решения. Обычно, эти условия формулируются в зависимости от свойств целевых функций (например, выпуклость в дискретном случае) и структуры множества допустимых решений (см., напр., [1, 3]). Знание таких условий служит основным инструментом нахождения локальных (градиентных) решений, а также методики оценки качества найденного решения (см., напр., [1, 4, 5]). Учитывая, что ds-выпуклые функции дискретного аргумента в общем случае не обладают свойством дискретной выпуклости или дискретной вогнутости, то формулирование таких условий не всегда возможно. Поэтому для нахождения оценки в глобальном экстремуме ds-выпуклых функций требуется специальное исследование.

В настоящей статье получены верхние и нижние границы в глобальном экстремуме ds-выпуклых функций на порядково-выпуклом множестве в терминах параметров допустимой области и мерой выпуклости целевой функции. Показаны, как могут быть применены полученные результаты в специальных задачах дробного дискретного программирования.

Отметим, что в непрерывной оптимизации ds-выпуклые функции достаточно актуальны и исследованы многими авторами (см., напр., [6]).

§2. ds-выпуклые функции

Пусть $Z_+^n\ (R_+^n)$ - множество всех n-мерных неотрицательных целочисленных (действительных) векторов. Множество $P \subseteq Z_+^n$ называется порядково-выпуклым [1], если из условия $x \le y,\ x,\ y \in P$ следует включение $[x, y] = \{z : x \le z \le y,\ z \in Z_+^n\} \subseteq P$. Будем в дальнейшем предполагать, что порядково-выпуклое множество P конечное и содержит единственный минимальный элемент - нулевой вектор 0=(0,…,0).

Функция $f : Z_+^n \to R$ (где R множество действительных чисел) называется ρ – координатно-выпуклой [4, 5], если

$$\Delta_{ij} f(x) \le 0,\ \forall x = (x_1,...,x_n) \in Z_+^n,\ i \ne j,\ \ i, j \in N_n = \{1, 2,...,n\},$$

$$\Delta_{ii} f(x) \le -\rho_i\ ,\forall x \in Z_+^n,\ i \in N_n,$$

где

$$\Delta_{ij} f(x) = \Delta_i f(x + e^j) - \Delta_i f(x),\ \Delta_j f(x) = f(x + e^j) - f(x),$$

e^j - j–й единичный n-мерный орт, $\rho = (\rho_1,..., \rho_n) \in R_+^n$.

Класс всех ρ – координатно-выпуклых функций на Z_+^n обозначим через $\Re_\rho(Z_+^n)$.

Через $S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n)$ обозначим множество:

$$S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n) = \{F(x) : F(x) = f(x) - \varphi(x),\ f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n),\ \varphi(x) \in \Re_q(Z_+^n)\}.$$

Если $F(x) \in S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n)$, то функцию $F(x)$ будем называть ds – выпуклой на Z_+^n.

Введем следующие обозначения:

$$h(x, y) = \sum_{i:x<y} h(x_i, y_i),\ h(x_i, y_i) = (y_i - x_i),\ i \in N_n,\ h(x) = h(0, x),$$

$$h = h(P) = \max\{h(x) : x \in P\},\ r = r(P) = \min\{h(x) - 1 : x \in Z_+^n \setminus P\}.$$

Следующая теорема позволяет найти верхние и нижние границы приращения функции из класса $S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n)$.

Теорема 1. Пусть $F(x) \in S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n)$. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - неубывающие функции, то справедливы неравенства:

$$F(y) - F(x) \le \sum_{i:x<y} h(x_i, y_i)\Delta_i f(x) - \sum_{i:x<y} \rho_i h(x_i, y_i)(h(x_i, y_i) - 1)/2 -$$

$$q_*(h(0, y) - 1) + \sum_{i:0<y} h(0, y_i)\Delta_i \varphi(0) - \sum_{i:0<y} q_i h(0, y_i)(h(0, y_i) - 1)/2,\ \forall x \le y, \quad (1)$$

$$F(y)-F(x)\geq -\sum_{i:x<y}h(x_i,y_i)\Delta_i\varphi(x)+\sum_{i:x<y}q_ih(x_i,y_i)(h(x_i,y_i)-1)/2+$$
$$\rho_*(h(0,y)-1)-\sum_{i:0<y}h(0,y_i)\Delta_i f(0)+\sum_{i:0<y}\rho_ih(0,y_i)(h(0,y_i)-1)/2,\ \forall x\leq y,\quad (2)$$

где

$$\rho_*=\sum_{i\in N_n}\rho_i/n,\ q_*=\sum_{i\in N_n}q_i/n.$$

Доказательство. Из теоремы 6 [4] для неубывающей функции $f(x)$ из класса $\Re_\rho(Z_+^n)$ имеем:

$$f(y)-f(x)\leq\sum_{i:x<y}h(x_i,y_i)\Delta_i f(x)-\sum_{i:x<y}\rho_ih(x_i,y_i)(h(x_i,y_i)-1)/2,\quad \forall x\leq y.\ (3)$$

Пусть $x^0=0,x^1,...,x^k=x$ - последовательность точек, непосредственно следующих друг за другом, из порядкового отрезка $[0,x]$. В силу того, что $\varphi(x)\in\Re_\rho(Z_+^n)$ и $\varphi(x)$ - неубывающая функция, получаем:

$$\varphi(x)-\varphi(0)=(\varphi(x)-\varphi(x^{k-1}))+(\varphi(x^{k-1})-\varphi(x^{k-2}))+...+(\varphi(x^1)-\varphi(0))=$$
$$\Delta_i\varphi(x^{k-1})+...+\Delta_i\varphi(0)\geq 0+q_i+...+q_i=q_i(h(0,x)-1),i\in N_n.$$

Отсюда имеем

$$\varphi(x)-\varphi(0)\geq q_*(h(0,x)-1).\quad (4)$$

Очевидно, что

$$F(y)-F(x)=(f(y)-f(x))-(\varphi(y)-\varphi(0))+(\varphi(x)-\varphi(0)),\quad (5)$$
$$F(y)-F(x)=(f(y)-f(0))-(f(x)-f(0))-(\varphi(y)-\varphi(x)).\quad (6)$$

Далее, применяя неравенство (3), соответственно для функций $f(y)-f(x),\varphi(x)-\varphi(0)$ и неравенство (4) для функции $\varphi(y)-\varphi(0)$, с учетом (5), выводим неравенство (1). Аналогично, применяя неравенство (4) для функции $f(y)-f(0)$ и неравенство (3) для функций $f(x)-f(0),\varphi(y)-\varphi(x)$, с учетом (6), доказываем неравенство (2). Теорема доказана.

§ 3. Оценки

Введем обозначения:

$$\delta_f=(\delta_1^f,...,\delta_n^f),\delta_i^f=\Delta_i f(0),i\in N_n,\Omega(\delta_f)=\sum_{i\in N_n}\delta_i^f,$$

$$\omega_1(\rho,\delta_f)=2\Omega(\delta_f)-\omega(\rho),\omega(\rho)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ \Omega(\rho)=0,\\ \left(\sum_{i:\rho>0}\dfrac{1}{\rho_i}\right)^{-1},\ \textit{если}\ \Omega(\rho)>0,\end{cases}$$

$$B(q,\varphi)=\frac{\theta(P)}{1+\theta(P)}(1-\theta(P)Q(q,r,h,\varphi)),\ A(q,\varphi)=\frac{1}{1-B(q,\varphi)},$$
$$Q(q,r,h,\varphi)=(1-r/h)^2\omega(q)/\omega_1(q,\delta_\varphi),\ 0<\theta(P)\leq 1.$$

Пусть x_F^* - глобальный максимум функции $F(x) \in S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n)$ на $P \subseteq Z_+^n$.

Через x_f^g, x_φ^g обозначим, соответственно, градиентные максимумы функций $f(x), \varphi(x)$ на множестве $P \subseteq Z_+^n$, т.е. x_f^g, x_φ^g - точки из множества P, построенные с помощью градиентного алгоритма покоординатного подъема (см., напр., [1, 4, 5]).

Теорема 2. Пусть $F(x) \in S\Re_{\rho,q}^{f,\varphi}(Z_+^n)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ - неубывающие функции на множестве $P \subseteq Z_+^n$. Тогда справедливы неравенства

$F(0) - A(q,\varphi)(\varphi(x_\varphi^g) - \varphi(0)) + \rho_*(r-1) \le F(x_F^*) \le$

$F(0) + A(\rho, f)(f(x_f^g) - f(0)) - q_*(r-1).$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующие леммы.

Лемма 1 (теорема 1, [5]). Если $f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n)$ - неубывающая функция, то справедливо неравенство

$$\frac{f(x_f^*) - f(x_f^g)}{f(x_f^*) - f(0)} \le B(\rho, f).$$

Лемма 2. Если $f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n)$ - неубывающая функция, то справедливо неравенство

$$f(x_f^*) \ge f(0) + \rho_*(r-1).$$

Если учесть, что для неубывающей функции $f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n)$ $h(0, x_f^*) \ge r$, то из (4) вытекает неравенство леммы 2.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что

$$F(x_F^*) = f(x_F^*) - \varphi(x_F^*) \le f(x_f^*) - \varphi(x_F^*), \tag{7}$$

$$F(x_F^*) = f(x_F^*) - \varphi(x_F^*) \ge f(x_F^*) - \varphi(x_\varphi^*). \tag{8}$$

Отсюда, учитывая неравенства из лемм 1, 2, примененные, соответственно, к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$, доказываем теорему 2.

Одним из возможных применений полученных результатов могут быть задачи дробного дискретного программирования. С этой целью рассмотрим задачу A: найти

$$\max\{\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} : x \in P \subseteq Z_+^n\},$$

где $f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n), \varphi(x) \in \Re_q(Z_+^n), \varphi(x) > 0, \forall x \in P, f(x), \varphi(x), \psi(x)$ - неубывающие функции на множестве $P \subseteq Z_+^n$. Решение задачи A связано с решением следующей задачи $D(\lambda)$ ($\lambda \ge 0$) параметрического программирования (см., напр., [2]):

$$\max\{F(x, \lambda) = f(x) - \lambda\varphi(x) : x \in P\}.$$

Очевидно, что $F(x,\lambda) \in S\Re^{f,\varphi}_{\rho,\lambda q}(Z^n_+)$, где $\lambda q = (\lambda q_1,...,\lambda q_n)$. Пусть x_λ - оптимальное решение задачи $D(\lambda)$ и

$\Phi(\lambda) = F(x_\lambda, \lambda) = \max\{F(x,\lambda) : x \in P\}$.

Из теоремы 2 имеем: $\underline{Q} \le \Phi(\lambda) \le \overline{Q}$, где

$\underline{Q} = F(0,\lambda) - A(\lambda q, \varphi)(\varphi(x^g_\varphi) - \varphi(0)) + \rho_*(r-1),$

$\overline{Q} = F(0,\lambda) + A(\rho, f)(f(x^g_f) - f(0)) - \lambda q_*(r-1).$

Пусть $\lambda^* = \max\{\psi(x) : x \in P\}$. Тогда очевидно (см., напр., [2]), что

$$\Phi(\lambda)\begin{cases} > 0 \Leftrightarrow \lambda < \lambda^*, \\ = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^*, \\ < 0 \Leftrightarrow \lambda > \lambda^*. \end{cases} \qquad (9)$$

Пусть $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ - соответственно, нижняя и верхняя границы λ^*. Так как оптимальное решение задачи A, в силу соотношения (9), совпадает с x_{λ^*}, его поиск сводится к нахождению корня функции $\Phi(\lambda)$, заданной на интервале $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$. Пусть $x^*_f, x^*_\varphi, x^*_\psi$ - глобальные максимумы, соответственно, функций $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ на множестве P. Тогда очевидно, что

$$\lambda^* = \psi(x^*_\psi) = \frac{f(x^*_\psi)}{\varphi(x^*_\psi)} \le \frac{f(x^*_f)}{\varphi(x^*_\psi)},\ \lambda^* = \psi(x^*_\psi) = \frac{f(x^*_\psi)}{\varphi(x^*_\psi)} \ge \frac{f(x^*_f)}{\varphi(x^*_f)}. \qquad (10)$$

Из лемм 1, 2 и (4), с учетом $h(0,x^*_f) \ge r, h(0,x^*_\varphi) \ge r, h(0,x^*_\psi) \ge r$, выводим:

$$\begin{aligned} &f(x^*_f) \le A(\rho,f)f(x^g_f) + (1-A(\rho,f))f(0), \\ &\varphi(x^*_\varphi) \le A(q,\varphi)\varphi(x^g_\varphi) + (1-A(q,\varphi))\varphi(0), f(x^*_f) \ge f(0) + \rho_*(r-1), \\ &\varphi(x^*_\varphi) \ge \varphi(0) + q_*(r-1), \varphi(x^*_\psi) \ge \varphi(0) + q_*(r-1). \end{aligned} \qquad (11)$$

Учитывая (11) в (10), имеем:

$$\underline{\lambda} \le \lambda^* \le \overline{\lambda}\ , \qquad (12)$$

где

$$\underline{\lambda} = \frac{f(0) + \rho_*(r-1)}{A(q,\varphi)\varphi(x^g_\varphi) + (1-A(q,\varphi))\varphi(0)}, \overline{\lambda} = \frac{A(\rho,f)f(x^g_f) + (1-A(\rho,f))f(0)}{\varphi(0) + q_*(r-1)}.$$

Соотношение (12) позволяет упростить поиск нулей (точного или приближенного) функции $\Phi(\lambda)$, а это равносильно построению решения (точного или приближенного) задачи A.

Замечание. Полученные оценки могут служить минорантой или мажорантой в методах построения последовательности планов [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987, 222 с.

2. Математические моделирования экономических процессов. Под ред. Е.Г.Белоусова и др. МГУ, 1990, 232 с.
3. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. // Кибернетика, 1985, № 2, с. 55-58.
4. Emelichev V. A. , Kovalev M. M., Ramazanov A. B. // J. Discrete Math. And Appl. 1992, v. 2, №2, p. 119-131.
5. Рамазанов А.Б. Дискрет. анализ и исслед. операций // Сер.1, 2005, т. 12, № 4. с. 60-80.
6. Horst R., Thoai N.V. // J.Optimization . Theory and Appl. 1999, v. 103, №1, p. 1-43.
7. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука, 1981, 208 с.

DİSKRET ARQUMENTLİ ds-QABARIQ FUNKSİYALARIN QLOBAL EKSTREMUMDA QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ VƏ BƏZİ QONŞU MƏSƏLƏLƏR

Ə.B.RAMAZANOV

XÜLASƏ

Diskret arqumentli iki qabarıq funksiyanın fərqi şəklində verilmiş funksiyaların tərtib-qabarıq çoxluqda qlobal ekstremumda aşağıdan və yuxarıdan qiymətləndirilməsi üçün apos-terior xətalar tapılmışdır. Alınmış nəticələr xüsusi kəsr diskret proqramlaşdırma məsələsinə tətbiq edilmişdir.

ESTIMATION OF ds-CONVEXITY FUNCTIONS OF DISCRETE ARGUMENT AND SOME NEAR QUESTIONS ON GLOBAL EXTREMUM

A.B.RAMAZANOV

SUMMARY

The article deals with new posterior upper and lower bounds in global extremum of difference of two strictly convex functions of discrete argument in the ordered convexity sets. The application of the results for special fraction discrete programming problem is shown.